# Varianta 54

**Subiectul I.**

**a)** $\left|\cos 1 + i \cdot \sin 1\right| = 1$.

**b)** $CD = \sqrt{2}$.

**c)** Se obțin punctele $A\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}, -\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$ şi $B\left(-\frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$.

**d)** Punctele $L, M, N$ sunt coliniare, deoarece $\overrightarrow{LN} = 2 \cdot \overrightarrow{LM}$.

**e)** $V_{ABCD} = \frac{3}{2}$.

**f)** $a = -8$ şi $b = 8\sqrt{3}$.

**Subiectul II.**

**1.**

**a)** Se verifică prin calcul direct.

**b)** Se foloseşte punctul **a)**.

**c)** $x = 0$.

**d)** Probabilitatea căutată este $p = 1$.

**e)** $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1$.

**2.**

**a)** $f'(x) = \sin x^2 + 2x^2 \cdot \cos x^2, \quad \forall x \in \mathbf{R}$.

**b)** $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1-\cos 1}{2}$.

**c)** $f'(x) \geq 0$, deci $f$ este strict crescătoare pe $[0,1]$.

**d)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0$.

**e)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{x^2} = 1$.

**Subiectul III.**

**a)** $\det(A) = 0$ şi $\operatorname{rang}(A) = 2$.

**b)** $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $A^3 = O_3$.

**c)** Deoarece matricele $I_3$ şi $A$ comută, avem:

$(I_3+A)(I_3-A+A^2)=I_3+A^3\overset{\text{b)}}{=}I_3$ şi analog $(I_3-A+A^2)(I_3+A)=I_3$, aşadar matricea $I_3+A$ este inversabilă, inversa sa fiind $I_3-A+A^2$.

**d)** Se arată prin calcul direct.

**e)** Deoarece $\det(Z)=a^3=0$, rezultă $a=0$ şi obținem $Z^3=O_3$.

**f)** Pentru $U=A$, $V=O_3$, avem $U\neq V$ şi $f(U)=f(V)$, aşadar funcția $f$ nu este injectivă.

**g)** Presupunem că există $X\in M_3(\mathbf{C})$ astfel încât $f(X)=A$.

Deoarece $XA=AX$, din **d)** şi **e)** deducem că $X^3=O_3$, deci $X^{2007}=\left(X^3\right)^{669}=O_3\neq A$, contradicție.

**Subiectul IV.**

**a)** Se arată prin calcul direct.

**b)** $f'(x)=\dfrac{2x^4+5x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2}$, $\forall\, x\in\mathbf{R}$.

**c)** $f'(x)>0$, $\forall\, x\in\mathbf{R}$, deci funcția $f$ este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$.

**d)** $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{2-\ln 2}{2}$.

**e)** $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, deci $f$ nu are asimptotă orizontală spre $+\infty$.

$m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=2$ şi $n=\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-2x\right)=0$, deci dreapta $d: y=2x$ este asimptota oblică spre $+\infty$ la graficul funcției.

**f)** Din **c)** ştim că $f$ este strict crescătoare, deci este injectivă pe $\mathbf{R}$.

Deoarece $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ şi $f$ este continuă pe $\mathbf{R}$ obținem că $\operatorname{Im} f=\mathbf{R}$, aşadar $f$ este surjectivă. În concluzie, $f$ este bijectivă.

**g)** Facem schimbarea de variabilă $f^{-1}(x)=y$ şi obținem $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{2}} g(x)\,dx=\frac{1+\ln 2}{2}$.